



TITLE:

作用素環と束論 (「Operator algebraとその応用」研究会報告集)

AUTHOR(S):

前田, 周一郎

CITATION:

前田, 周一郎. 作用素環と束論 (「Operator algebraとその応用」研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 104: 47-63

ISSUE DATE:

1970-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106311>

RIGHT:

作用素環と束論

愛媛大 理 前 田 周一郎

von Neumann algebra と束論の関係は, Murray, von Neumann [17] の理論の当初から, projection の作る束における次元論を中心として始まっている。その後これに基づいて発展したものとして, 連続幾何学の理論と orthomodular lattice の理論の二つがあり, それぞれ幾何学的束や量子論理とも関連をもつて研究が進められてきたが, ここではその流れをふり返って, とくにここ 15 年ばかりの間に成された結果を出来るだけまとめたい。とくに参考となる文献として Abbott [1] に收められている Holland の論説: The current interest in orthomodular lattices をあげておく。

§1. von Neumann algebra の次元論

von Neumann algebra \mathcal{A} の projection 全体を $P(\mathcal{A})$ とかく。二つの $P, Q \in P(\mathcal{A})$ に対して $P = U^*U$, $Q = UU^*$ となる $U \in \mathcal{A}$ が存在するとき, $P \sim Q$ とかく。Murray, von Neumann [17] では " \sim " を同次元性として, 束 $P(\mathcal{A})$ についての

次元論を展開し, factor \mathcal{A} を5つの型: $I_n, I_\infty, II_1, II_\infty, III$ に分類する等重要な成果をあげた。この理論はさらに Dixmier 等によって整備され [3], orthomodular lattice の理論等の発展に大きな寄与をすることになった。束 $P(\mathcal{A})$ の基本的性質には, orthocomplemented, complete, さらに \mathcal{A} が有限のときは modular, の三つがある。(束の二元 a, b が modular pair とは, $c \leq b$ ならば $(c \vee a) \wedge b = c \vee (a \wedge b)$ が成立すること、このとき $(a, b)M$ とかく。すべての二元が modular pair となる束を modular lattice という。)

§2. 連続幾何学

von Neumann の講義 [19] に始まった連続幾何学は、すでに一応完成された形で、本として F. Maeda [12] と Skornyakov [23] がある。その内容は次元論と表現論とに大別されるが、ここで扱う束は $P(\mathcal{A})$ の orthocomplemented を弱めて complemented としかつ modular を仮定する。さらに次元論では complete を入れ、連続性を加える。(連続とは上連続性 " $a \uparrow a$ ならば $a \uparrow b \uparrow a \wedge b$ " と下連続性 " $a \downarrow a$ ならば $a \downarrow b \downarrow a \vee b$ " をあわせていう。) すなわち連続幾何とは束としては continuous, complemented, modular lattice のことで、これは射影幾何の拡張になっている。このような束の上で、 $P(\mathcal{A})$ の次元論と

全く類似の理論が展開されるのであるが、そのとき同次元性は配景性によって定義される。(0をもつ束 L の二元 a, b が配景的であるとは、 $a \vee x = b \vee x$, $a \wedge x = b \wedge x = 0$ とする $x \in L$ が存在することである。) ところでこれが \mathcal{O} が有限の場合の $P(\mathcal{O})$ の次元論を特別な場合として含んでいることが、後に Kaplansky [7] によって証明された。すなわち

定理 2.1. complete orthocomplemented modular lattice は連続である。

これより、 \mathcal{O} が有限のとき $P(\mathcal{O})$ は連続幾何となり、“ $*$ ”と配景性は一致することもある。

一方表現論の結果は次の通りである。

定理 2.2. complemented modular lattice は次数が 4 以上の場合、ある regular ring (一意的に定まる) の主右イデアルの作る束と同型である。

系. orthocomplemented modular lattice は次数が 4 以上の場合、ある $*$ -regular ring の projection ($e = e^* = e^2$ とする元 e) の作る束と同型になる。

注意. \mathcal{O} が有限 von Neumann algebra のとき、 $P(\mathcal{O})$ は complemented modular lattice であるから定理 2.2 の系により、ある $*$ -regular ring $\bar{\mathcal{O}}$ が存在して $P(\mathcal{O}) = P(\bar{\mathcal{O}})$ とする。こゝで $\bar{\mathcal{O}}$ は \mathcal{O} を含み、具体的に $\bar{\mathcal{O}}$ は domain dense な closed operator

の集りになっている。このことは \mathcal{O} が type II_1 の factor の場合に於いて [17] の中で述べられている。また有限な AW^* -algebra の場合への拡張が Berberian [2] で示されている。

§3. 連続幾何学の拡張

(a) 次元論の公理的取扱

S. Maeda [14], [15] において, §1 と §2 の次元論は公理系を用いて統一された。まず \mathcal{O} をもつ束 \mathcal{L} において次の公理系 (L1) - (L4) をみなす “ \perp ” があるとき, これを半直交性という。

$$(L1) \quad a \perp a \text{ ならば } a = 0$$

$$(L2) \quad a \perp b \text{ ならば } b \perp a$$

$$(L3) \quad a \perp b, a_1 \leq a \text{ ならば } a_1 \perp b$$

$$(L4) \quad a \perp b, a \vee b \perp c \text{ ならば } a \perp b \vee c.$$

その例としては, 一つは orthocomplemented lattice の直交性があり, 他の一つは modular lattice における独立性 “ $a \wedge b = 0$ ” がある。後者は M -symmetric lattice, すなわち “ $(a, b)M \Rightarrow (b, a)M$ ” が成立つ束の拡張され, そこで “ $a \wedge b = 0$ かつ $(a, b)M$ ” によって半直交性が与えられる。

半直交性をもつ束 \mathcal{L} において, $a \leq b$ ならば $a \vee c = b$, $a \perp c$ となる $c \in \mathcal{L}$ が存在するとき, \mathcal{L} は relatively semi-orthocomplemented という。さらに \mathcal{L} は complete と仮定し,

次の公理も満たすとする。

(L5) $a \uparrow a, a \perp b$ ならば $a \perp b$ (\perp の連続性)

(直交性については (L5) を満たし, M -symmetric lattice の半直交性については束が上連続であれば (L5) が成立つ。)

以上のような束 L の中に次の条件を満たす同値関係 " \sim " が存在するとき, L を dimension lattice とする。

(A₁) $a \sim 0$ ならば $a = 0$ 。

(A₂) $a \sim b_1, \forall b_2$ ならば $a = a_1 \vee a_2, a_1 \sim b_1$ とある a_1, a_2 が存在する (\vee は半直交元 a の join を示す)。

(B) a と b が配景的ならば $a \sim b$ 。

(C₁) $a = \bigvee_{\alpha} a_{\alpha}, b = \bigvee_{\alpha} b_{\alpha}, a_{\alpha} \sim b_{\alpha}$ ならば $a \sim b$ 。

(C₂) $a = a_1 \vee a_2, b = b_1 \vee b_2$ ならば $a \sim b$ 。

さて dimension lattice においては, 5つの型への分解定理, 比較定理, 反対称律, 有限性保存の定理, 次元関数の存在定理等を主内容とする次元論が展開される (S. Maeda [16])。

連続幾何は, $a \wedge b = 0$ を半直交性とし, 配景性を " \sim " によって dimension lattice とする。一方 \mathcal{A} が von Neuman algebra のとき, $P(\mathcal{A})$ は直交性および " \sim " によって dimension lattice とする。

(b) 下連続性を除いた連続幾何学

連続幾何学の次元論で、下連続性は配景性が transitive であることの証明に必要である。しかしこのために同時に有限性も生じて、projection lattice の場合の ような無限の型は出てこない。S. Maeda [15] では配景性の代りにその有限結合である射影性を用いて、下連続性を除いた upper continuous complemented modular lattice が dimension lattice であることを証明した。例えば modular matroid lattice (無限次元射影幾何) はこのような束の厚子的な場合であり、type I ∞ の dimension lattice である。

(c) modular extension をもつ束

complemented modular lattice Λ からその一部の元を取去った形の束 L の例として次の二つがある (Λ と L の modular extension と言う)。 (1) アフィン幾何 (2) 線型位相空間 (局所凸とする) の閉部分空間の作る束。この両者は全く異質のものではあるが、 M -symmetric であるのが重要な共通点である。このような束についての議論は、近く出版された F. Maeda, S. Maeda [13] で詳述される。

§4. orthomodular lattice の理論

projection lattice は有限でない ω modular に限るもののが、ある程度の modularity をもっている。とくに基本的なのは

次の orthomodular である。

orthocomplemented lattice L において、すべての $a \in L$ に対して $(a, a^\perp)M$ であるとき、 L は orthomodular であるという。これは次の条件と同値である。 $a \leq b$ ならば $b = a \vee (b \wedge a^\perp)$ 。これより orthomodular は relatively orthocomplemented を意味していることがわかる。

(a) commutativity

projection lattice における projection の可換性 ($PQ = QP$) は orthocomplemented lattice L において次のように表現される。

$$a \leq b \quad \text{と} \quad a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^\perp).$$

さて、 L が orthomodular であるはこの関係は対称的であり、逆に C が対称的ならば、 L は orthomodular である (Nakamura [18])。これはこの commutativity が orthomodular lattice の理論では、一つの重要な道具となつてくる ([13], Section 36 参照)。例えば $\{z \in L; z \leq a \text{ for all } a \in L\}$ は丁度 L の center である。

(b) 次元論

Loomis [9] の公理系によって orthomodular lattice の次元論を展開したが、これは §3 の (a) に包含されるものである。さて、complete orthomodular lattice が具体的にどの程度の条件をみたすとき、前記 (A₁)—(C₊) をみたす同値関係が存在し

dimension lattice になるかという問題について、また定理 2.1 によれば次のことがいえる。

定理 4.1. complete orthomodular lattice L が finite dimension lattice になるための必要十分条件は L が modular であることである。

さらに、 L が locally finite dimension lattice (type III の部分のもの) になるための条件が Ramsay [21] と MacLaren [11] によって求められた。束 L の元 a が modular とは、すべての $x \in L$ に対して $(x, a)M$ が成立すること、modular element 全体を M とかく。 a が strongly modular とは $a_1 \leq a$ ならば $a_1 \in M$ であること、そのような元全体を M_s とかく。

定理 4.2. complete orthomodular lattice L についての次の 4 条件は同値である。

(α) L は M -symmetric であり、 M_s が join-dense である (すなわち L のすべての元が M_s の元の join で表わされる)。

(β_1) M_s は join-dense であり p -ideal (配景性に関して α ideal) である。

(β_2) M に含まれる join-dense な p -ideal が存在する。

(γ) L は locally finite dimension lattice である。

この証明について、(α) \Rightarrow (β_1) は MacLaren によるもので、途中に定理 2.1 を用いる。(β_1) \Rightarrow (β_2) は自明。(β_2) \Rightarrow (α) は

Ramsay の結果を、直交性を除いた次の形に一般化される ([13], Section 35 参照)。

定理 4.3. $0, 1$ を持つ relatively complemented lattice L が M に含まれる join-dense p -ideal を持つならば, L はその dual もしくは M -symmetric である。

$(\gamma) \Rightarrow (\beta_2)$ は有限右元全体が M に含まれる join-dense な p -ideal になることからわかる。最後に $(\beta_1) \Rightarrow (\gamma)$ の次元論の主要部分となるが, (β_1) を仮定して L の同次元性 " \sim " を次のように定義する。

$a \sim b$ とは $\exists \alpha \in M_s$ あるいは $\exists \alpha \in M$ となるような中心元 α に対してはつねに $\alpha \wedge a = \alpha \wedge b$ は配景的であることを。

このとき " \sim " は同値関係であり条件 $(A_1) - (C_+)$ をすべて満たすことが証明出来る。また M_s が join-dense であることから L は locally finite になる。

この定理 4.2 の特別の場合として, MacLaren は次の定理を示した。 $a \in L$ が minimal とは $a_1 \leq a$ となるような中心元 a_1 が存在して $a_1 = \alpha \wedge a$ となることを示す。明らかに minimal な元は M_s に属する。

定理 4.4. complete orthomodular lattice L が dimension lattice of type I であるための必要十分条件は L が M -symmetric であり minimal element 全体が join-dense になることである。

次に定理 4.2 を拡張することとを考えた。まず complete orthomodular lattice においては、各元 a に対しそれを含む最小の中心元 $e(a)$ が存在する。さらに $\{e(a); a \in M_S\}$ の中には最大元が存在することもあるから、これを z_m とかくことにすれば、次の定理が証明される。

定理 4.5. L は complete M -symmetric orthomodular lattice とするとき、次の 4 条件は同値である。

- (α) M_S は配景性で閉じている。
- (β) M_S は部分束 $L[0, z_m] = \{a \in L; a \leq z_m\}$ で join-dense である。
- (γ) M_S は $L[0, z_m]$ で join-dense な p -ideal を作る。
- (δ) L は dimension lattice で $L[0, z_m]$ が locally finite である。

(c) O-symmetry

Schreiner [22] は、orthocomplemented lattice L において、 $(a, b)M \Rightarrow (b^\perp, a^\perp)M$ が成立するとき、 L は O-symmetric と呼ぶ。O-symmetric ならば M-symmetric であることを証明した。 $(a, b)M$ の dual property (すなわち $c \geq b$ ならば $(c \wedge a) \vee b = c \wedge (a \vee b)$) を $(a, b)M^*$ とかければ、 $(b^\perp, a^\perp)M$ は $(b, a)M^*$ と同値であるから、 L が O-symmetric のときは $(a, b)M, (b, a)M, (a, b)M^*, (b, a)M^*$ の4つは同値となる。

Schreiner は M -symmetric な orthomodular lattice は O -symmetric であろうと予想した但、未だ解決されていない。

(d) 表現論

Foulis [5] は任意の orthomodular lattice が $*$ -semigroup を用いて表現出来ることを示した。以下その概要をのべる。

$*$ -semigroup \mathcal{Q} (semigroup \mathcal{Q} $(x^*)^* = x, x^{**} = x$ を満たす automorphism $x \rightarrow x^*$ をもつもの) の projection 全体 $P(\mathcal{Q})$ は $ef = e$ のとき $e \leq f$ と定義して ordered set を作る。 \mathcal{Q} の各元の right annihilator が一つの projection から生成される、すなわち $\forall a \in \mathcal{Q} \exists e \in P(\mathcal{Q}) \{x \in \mathcal{Q}; ax = 0\} = e\mathcal{Q}$ のとき、 \mathcal{Q} は Baer $*$ -semigroup であるという。こゝで $e \leq a'$ とかく。 $e \in P(\mathcal{Q})$ に対し一般に $e \leq e''$ であるが、 $e = e''$ のとき e を closed projection といい、その全体を $P_c(\mathcal{Q})$ とかく。

定理 4.6. \mathcal{Q} が Baer $*$ -semigroup のとき、 $P_c(\mathcal{Q})$ は orthomodular lattice である。こゝで e' が e の orthocomplement になる。

さて、束 L に対し、 L から L への order を保つ写像全体を $\Phi(L)$ とすれば、これは semigroup を作る。さらに $(\varphi\psi)(a) = \psi(\varphi(a))$ とする。 $\Phi(L)$ の二元 φ, φ^* が次の条件を満たすとき互に共轭であるという。

$$\forall x \in L \quad \varphi^*(\varphi(x^\perp)^\perp) \leq x, \quad \varphi(\varphi^*(x^\perp)^\perp) \leq x.$$

$\mathfrak{K}(L)$ の元で共軌元をもつものの全体を $\mathcal{O}(L)$ とかけば, $\varphi\psi$ は $\psi^*\varphi^*$ と共軌であることから, $\mathcal{O}(L)$ は $*$ -semigroup となる。ところで, $a \in L$ に対して $\varphi_a(x) = (x \vee a^\perp) \wedge a$ と定義すれば, φ_a は $\mathfrak{K}(L)$ の自己共軌元でかつ $\varphi_a \varphi_a = \varphi_a$, しかも φ_a は $\mathcal{O}(L)$ の projection であることがわかる。さらに任意の $\mathcal{O}(L)$ の元 φ に対し $\varphi(1)^\perp = a$ とおけば, φ の right annihilator は φ_a から生成されることがわかるから, $\mathcal{O}(L)$ は Baer $*$ -semigroup で $\{\varphi_a; a \in L\}$ がその closed projection 全体となる。これより次の表現定理を得る。

定理 4.7. 任意の orthomodular lattice L に対し, ある Baer $*$ -semigroup \mathcal{O} が存在し, L は $P_c(\mathcal{O})$ と同型 (直交性も含めて) となる。

次の $*$ -semigroup \mathcal{O} について, $\forall S \subset \mathcal{O} \exists e \in P(\mathcal{O})$
 $\{x \in \mathcal{O}; Sx = 0\} = e\mathcal{O}$ のとき, \mathcal{O} を complete Baer $*$ -semigroup という。定理 4.6 において \mathcal{O} が complete なるは L が complete であり, 逆に定理 4.7 において L が complete なるは \mathcal{O} が complete である。

注意。Baer $*$ -ring では projection e に対して $e' = 1 - e$ であるから, すべての projection は closed である。orthomodular lattice が Baer $*$ -ring を用いて表現出来るかという問題に関係して, Janowitz [6] では次のことが証明されている。

complete orthomodular lattice L が定理 4.2 の条件を満たすとき, L は \mathcal{P} の projection が closed であるような Baer*-semigroup で表現出来る。

§5. Projection lattice の特性

これまで本論のうち projection lattice を基にして発展した連続幾何学と orthomodular lattice の理論の概要を述べたが, ここでは projection lattice $P(\mathcal{A})$ に注目して, 一般の orthomodular lattice では成立しない $P(\mathcal{A})$ の特性と, それが \mathcal{A} のどのような性質から生れるかを調べてみる。

(a) O-symmetry

Mackey [10] は Banach space の closed subspace の作る束において, $(a, b)M, (b, a)M, (a, b)M^*, (b, a)M^*$ の4つは同値であることを示したが, これにより Hilbert space 上の projection の作る束は O-symmetric である。Topping [24] はこれを拡張して, 任意の von Neumann algebra の projection lattice は O-symmetric であることを示した。その拡張された形は次の通りである。([13], Section 37 参照)

定理 5.1. Baer*-ring \mathcal{A} が次の条件を満たせば $P(\mathcal{A})$ は O-symmetric である。

$$(SR) \quad \forall a \in \mathcal{A} \exists |a| \in \mathcal{A} \text{ s.t. } |a|^* = |a|, |a|^2 = a^*a, |a| \leq a^*a.$$

\mathcal{A} が AW^* -algebra ならば, (SR) が満たされるので $P(\mathcal{A})$ は O -symmetric である。

(b) dimension lattice

\mathcal{A} が complete Baer $*$ -ring のとき $P(\mathcal{A})$ は complete orthomodular lattice であるが, $e, f \in P(\mathcal{A})$ に対して $e = x^*x, f = xx^*$ とした $x \in \mathcal{A}$ が存在するとき $e \sim f$ と定義して, これを同次元性として $P(\mathcal{A})$ が dimension lattice になる (すなわち " \sim " が条件 $(A_1) - (C_4)$ を満たす) ための十分条件が, Kaplansky [8] によって求められている。それは \mathcal{A} が上記 (SR) と次の条件 (EP) を満たすことである。

$(EP) \forall a \in \mathcal{A} \exists h \in \mathcal{A} \text{ s.t. } h^* = h, h \subset \subset a^*a, a^*ah^2 \in P(\mathcal{A})$.

\mathcal{A} が AW^* -algebra ならばこの二条件は満たされるので, $P(\mathcal{A})$ は dimension lattice である。

(c) 配景性の transitivity

Fillmore [4] は \mathcal{A} が von Neumann algebra のとき $P(\mathcal{A})$ において配景性は transitive であることを証明した。(東論で配景性の transitivity を証明出来るのは continuous complemented modular lattice においてである。) この結果は次の定理からえられる。

定理 5.2. von Neumann algebra \mathcal{A} の二つの projection e, f が $P(\mathcal{A})$ で配景的であるための必要十分条件は, それらが

\mathcal{A} is unitary equivalent, すなわち \mathcal{A} の unitary element u が存在して $u^* e u = f$ となることである。

Fillmore によるこの定理の証明は AW^* -algebra には適用されず、したがって \mathcal{A} が AW^* -algebra の場合、 $P(\mathcal{A})$ において配景性が transitive になるかどうか不明である。

(d) Hilbert 空間の projection lattice の特性化

Hilbert 空間の projection lattice は von Neumann algebra のそれの特別の場合であり、complete 0-symmetric, orthomodular lattice である上に irreducible, atomic の性質を持つ。さらにこれにいくつかの性質を加えて、その特性化をはかす問題については、量子論の関係して Zierler [25], [26] や Piron [20] の結果があるけれども、束論的に十分なものはない。
[20] では、irreducible modular matroid lattice がある体 K 上のベクトル空間の部分空間の束で表現出来ることを用いるが、この K が実数体または複素数体にあることを仮定して入れている。一方 [25] では atomic orthomodular lattice L が可分な Hilbert 空間の projection lattice と同型になるための条件を出しているが、それは L が十分多くの state を持つことにより非常に複雑なもので、束論の定理としてはもっと整備された形が望まれる。

References

- [1] J. C. Abbott, Trends in lattice theory, Van Nostrand, New York, 1970.
- [2] S. K. Berberian, On the projection geometry of a finite AW*-algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 493-509.
- [3] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espaces hilbertien, Gautier-Villars, Paris, 1957.
- [4] P. A. Fillmore, Perspectivity in projection lattices, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 383-387.
- [5] D. J. Foulis, Baer *-semigroups, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), 648-654.
- [6] M. F. Janowitz, Equivalence relations induced by Baer *-semigroups (to appear).
- [7] I. Kaplansky, Any orthocomplemented complete modular lattice is a continuous geometry, Ann. of Math., 61 (1955), 524-541.
- [8] ———, Rings of operators (Lecture notes 1955), Benjamin, New York, 1968.
- [9] L. H. Loomis, The lattice theoretic background of the dimension theory of operator algebras, Memoirs Amer. Math. Soc., No. 18, 1955.
- [10] G. W. Mackey, On infinite-dimensional linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 57 (1945), 155-207.
- [11] M. D. MacLaren, Nearly modular orthocomplemented lattices, Trans. Amer. Math. Soc., 114 (1965), 401-416.
- [12] F. Maeda, Kontinuerliche Geometrien, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- [13] F. Maeda and S. Maeda, Theory of symmetric lattices, Springer-Verlag, Berlin, 1970 (in press).

- [14] S. Maeda, Dimension functions on certain general lattices,
J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 19 (1955), 211-237.
- [15] ———, Dimension theory on relatively semi-orthocomplemented
lattices, *ibid.*, 25 (1961), 369-404.
- [16] ———, 束における次元論, Functional Analysis Sympos. 報告,
No. 3 (1965), 1-19.
- [17] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators,
Ann. of Math., 37 (1936), 116-229.
- [18] M. Nakamura, The permutability in a certain orthocomplemented
lattice, Kodai Math. Sem. Reports., 9 (1957), 158-160.
- [19] J. von Neumann, Continuous geometry (Lecture notes 1936-37),
Princeton Univ. Press, Princeton, 1960.
- [20] C. Piron, Axiomatique quantique, Helv. Phys. Acta, 37 (1964),
439-468.
- [21] A. Ramsay, Dimension theory in complete orthocomplemented
weakly modular lattice, Trans. Amer. Math. Soc., 116 (1965),
9-31.
- [22] E. A. Schreiner, Modular pairs in orthomodular lattices,
Pacific J. Math., 19 (1966), 519-528.
- [23] L. A. Skornyakov, Complemented modular lattices and regular
rings, Oliver and Boyd, Edinburgh-London, 1964.
- [24] D. M. Topping, Asymptoticity and semimodularity in projection
lattices, Pacific J. Math., 20 (1967), 317-325.
- [25] N. Zierler, Axioms for non-relativistic quantum mechanics,
Pacific J. Math., 11 (1961), 1151-1169.
- [26] ———, On the lattice of closed subspaces of Hilbert
space, *ibid.*, 19 (1966), 583-586.